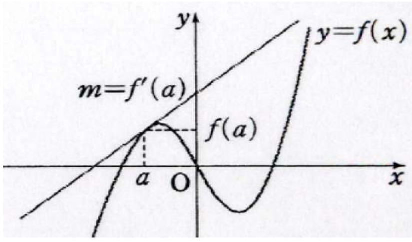
미분계수와 접선의 기울기

① 미분계수와 접선의 기울기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기를 m이라 할 때, 기울기 m은 $x=a$에서의 미분계수와 같다. 즉, $m=f'(a)$이다.



접선의 방정식

① 접점이 주어질 때의 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이므로 접선의 방정식은

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

② 기울기가 주어질 때의 접선의 방정식

㉠ 곡선 $y=f(x)$ 위의 접점 $(a, f(a))$을 놓는다.

㉡ $f'(a)=m$이므로 a의 값을 구한다.

㉢ 접선의 방정식 : $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

③ 곡선 밖의 한 점 $P(t, f(t))$에서 그은 접선의 방정식

㉠ 곡선 $y=f(x)$ 위의 접점 $(a, f(a))$을 놓는다.

㉡ $f'(a)$를 이용하여 접선의 방정식을 구한다.

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

㉢ 이 접선의 방정식이 점 P를 지나므로 대입하여 a의 값을 구하고, 접점, 접선의 방정식을 구한다.

함수의 증가, 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간의 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$일 때

① $f(x_1) < f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다 또는 증가함수라고 한다.

② $f(x_1) > f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다 또는 감소함수라고 한다.

증가, 감소와 미분계수

① 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때

㉠ $f'(a) > 0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태에 있다.

㉡ $f'(a) < 0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 감소상태에 있다.

② 미분가능한 함수 $f(x)$가 어느 구간의 임의의 실수 x에 대하여

㉠ $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가함수이다.

㉡ $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소함수이다.

증가함수, 감소함수의 성질

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고 그 구간에서

① $f(x)$가 증가함수이면 $f'(x) \geq 0$이다.

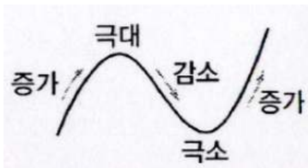
② $f(x)$가 감소함수이면 $f'(x) \leq 0$이다.

함수의 극대와 극소

$x=a$에서 연속인 함수 $f(x)$가

① $x=a$에서 증가상태에서 감소상태로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하고 $f(a)$의 값을 극댓값, 점 $(a, f(a))$를 극대점이라 한다.

② $x=a$에서 감소상태에서 증가상태로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소라 하고 $f(a)$의 값을 극솟값, 점 $(a, f(a))$를 극소점이라 한다.

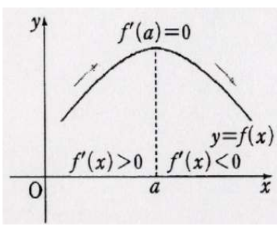


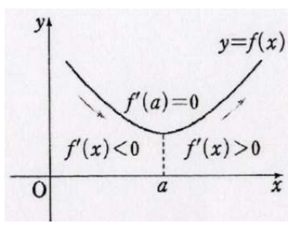
극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양(+)에서 음(−)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

② 음(−)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.





극값과 미분계수

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, x가 증가하면서 a를 지날 때,

① $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 변화면, $f(x)$는 $x=a$에서 극대라고 하고, $f(a)$를 극댓값이라 한다.

② $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 변화면, $f(x)$는 $x=a$에서 극소라고 하고, $f(a)$를 극솟값이라 한다.

※ 연속이면서 미분가능하지 않은 점 : 뾰족점
불연속이고 미분 불가능한 점 : 불연속점

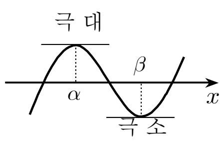
삼차함수의 극대, 극소

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 에서 $f'(x)=0$이 두 근 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$를 가질 때

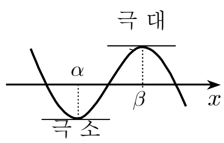
① $a>0$이면 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다.

② $a<0$이면$x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다.

$a>0$



$a<0$



함수의 최대, 최소

폐구간 $[a,b]$에서 함수 $f(x)$가 연속일 때, 함수 $f(x)$는 반드시 최댓값과 최솟값을 가지며

① 함수 $f(x)$의 최댓값은 극댓값과 구간의 양 끝점에서의 함수값 $f(a)$, $f(b)$중에서 가장 큰 값이다.

② 함수 $f(x)$의 최솟값은 극솟값과 구간의 양 끝점에서의 함수값 $f(a)$, $f(b)$중에서 가장 작은 값이다.

※ 롤의 정리 : 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이고 개구간 (a,b)에서 미분가능하면 $f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$인 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다.

※ 평균값의 정리 : 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이고 개구간 (a,b)에서 미분가능하면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다.

방정식 부등식의 활용

① 방정식의 실근과 그래프 교점의 관계

㉠ 방정식 $f(x)=0$의 실근은 곡선 $y=f(x)$와 x축과의 교점의 x좌표이다. 따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 x축과의 교점의 개수와 같다.

㉡ 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표이다.

② 삼차 방정식의 실근의 개수

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 극댓값과 극솟값을 가질 때, 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 근은 다음과 같다.

㉠ (극댓값) × (극솟값) < 0 : 서로 다른 세 실근

㉡ (극댓값) × (극솟값) = 0 : 중근과 다른 한 실근

㉢ (극댓값) × (극솟값) > 0 : 한 실근과 두 허근

③ 부등식의 활용

㉠ 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$임을 증명하려면 $f(x)$의 최솟값 > 0 임을 보인다.

㉡ 부등식 $f(x)>g(x)$를 증명하려면 $F(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 $F(x)>0$임을 보인다.

속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 좌표 x가 $x=f(t)$로 나타내어 질 때,

① 시각 t에서 $t+\Delta t$까지의 평균 속도의 정의

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

② 시각 t에서의 속도

$$v=\frac{dx}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=f'(t)$$

속도 v의 절대값 $|v|$를 속력이라 한다.

③ 시각 t에서의 가속도

$$a=\frac{dv}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=v'(t)=f''(t)$$

길이, 넓이, 부피의 변화율

어떤 물체의 길이를 l, 넓이를 S, 부피를 V라고 할 때,

① 시각 t에서의 길이의 변화율 : $\dfrac{dl}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta l}{\Delta t}$

② 시각 t에서의 넓이의 변화율 : $\dfrac{dS}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$

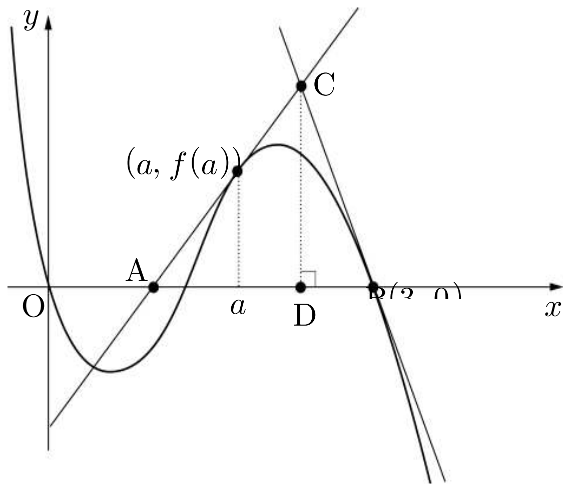
① 시각 t에서의 부피의 변화율 : $\dfrac{dV}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta V}{\Delta t}$

기 출	1
07. 6월 평가원	

양수 a에 대하여 점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선과 점 $(0,\ a)$에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선이 서로 평행할 때, $90a$의 값을 구하시오.

기 출	2
07. 7월 전국연합	

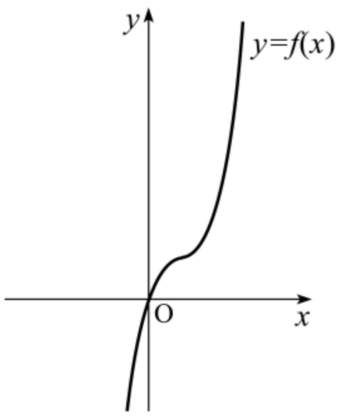
그림과 같이 삼차함수 $f(x)=-x^3+4x^2-3x$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$에서 기울기가 양의 값인 접선을 그어 x축과 만나는 점을 A, 점 $\mathrm{B}(3,\ 0)$에서 접선을 그어 두 접선이 만나는 점을 C, 점 C에서 x축에 수선을 그어 만나는 점을 D라 하고 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:1$일 때, a의 값들의 곱은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

기 출	3
07. 10월 전국연합	

그림은 삼차함수 $f(x)=x^3-3x^2+3x$ 의 그래프이다.



원점을 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선은 두 개개다

두 접선과 곡선 $y=f(x)$의 교점 중 원점이 아닌 점들의 x 좌표의 합을 S라 하자. 이때, $10S$의 값을 구하시오.

기 출	4
08. 6월 평가원	

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$는 $x=a$에서 극솟값 b를 가진다. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2,\ f(2))$에서 접하는 직선을 l이라 할 때, 점 $(a,\ b)$에서 직선 l까지의 거리가 d이다. $90d^2$의 값을 구하시오.

기 출	5
04. 6월 평가원	

미분가능한 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프는 $x=a$ 와 $x=b$ 에서 만나고, $a<c<b$ 인 $x=c$ 에서 두 함수 값의 차가 최대가 된다. 다음 중 항상 옳은 것은?

① $f'(c)=-g'(c)$　② $f'(c)=g'(c)$
③ $f'(a)=g'(b)$　④ $f'(b)=g'(b)$
⑤ $f'(a)=g'(a)$

기 출	6
04. 6월 평가원	

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 한 점 $(a,\ f(a))$ 에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$ 라 하자. $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보　기>

ㄱ. $h(x_1)=h(x_2)$ 를 만족시키는 서로 다른 두 실수 $x_1,\ x_2$ 가 존재한다.
ㄴ. $h(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이다.
ㄷ. 부등식 $|h(x)|<\dfrac{1}{100}$ 의 해는 항상 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄷ

기 출	7
04. 6월 평가원	

세 실수 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가

$$f'(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$$

일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보　기>

ㄱ. $a=b=c$ 이면, 방정식 $f(x)=0$ 은 실근을 갖는다.
ㄴ. $a=b\neq c$ 이고 $f(a)<0$ 이면, 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. $a<b<c$ 이고 $f(b)<0$ 이면, 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

기 출	8
05. 6월 평가원	

실수에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 는 다음 두 조건을 만족한다.

(가) 임의의 실수 $x,\ y$ 에 대하여
$f(x-y)=f(x)-f(y)+xy(x-y)$
(나) $f'(0)=8$

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극댓값을 갖고 $x=b$ 에서 극솟값을 가질 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오.

기 출	9
04. 11월 수 능	

$a > 1$ 일 때, 함수
$f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax - 4a + 2$ 에 대하여 방정식 $f(x) = 0$ 의 한 실근을 b 라 하자.
다음은 두 수 a, b 의 크기를 비교하는 과정이다.

> $f'(x) =$ $\boxed{(가)}$ 이고 $a > 1$ 이므로 $f(x)$ 는
> $x = 1$ 에서 $\boxed{(나)}$ 을 가진다.
> 그런데 $f(1) < 0$이고 $f(b) = 0$ 이므로
> a $\boxed{(다)}$ b 이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$6(x+a)(x+1)$	극솟값	$>$
②	$6(x+a)(x+1)$	극솟값	$<$
③	$6(x-a)(x-1)$	극솟값	$>$
④	$6(x-a)(x-1)$	극솟값	$<$
⑤	$6(x-a)(x-1)$	극솟값	$>$

기 출	10
05. 7월 전국연합	

삼차함수 $y = f(x)$ 가 극댓값 $\frac{1}{2}$, 극솟값 -2 을 가질 때, 함수 $g(x)$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \{f(x)\}^{2n}}$$

이때, 실수 전체의 집합에서 함수 $y = g(x)$ 는 $x = \alpha$ 에서 불연속이다. α 의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

기 출	11
05. 11월 수 능	

함수 $y = f(x)$ 가 모든 실수에서 연속이고,
$|x| \neq 1$ 인 모든 x 의 값에 대하여 미분계수 $f'(x)$ 가

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 & (|x| < 1) \\ -1 & (|x| > 1) \end{cases}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

> <보 기>
>
> ㄱ. 함수 $y = f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극값을 갖는다.
> ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(-x)$ 이다.
> ㄷ. $f(0) = 0$ 이면 $f(1) > 0$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

기 출	12
06. 6월 평가원	

두 함수
$f(x) = x^4 - 4x + a$, $g(x) = -x^2 + 2x - a$ 의 그래프가 오직 한 점에서 만날 때, a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

기 출	13
07. 6월 평가원	

사차함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
(나) 함수 $f(x)$는 극솟값 -10을 갖는다.

기 출	14
07. 7월 전국연합	

원점을 지나는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(2+x)=f(2-x)$
(나) $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

이 때, $f(x)$의 극댓값을 a라 할 때, a^2의 값을 구하시오

기 출	15
07. 11월 수 능	

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ $(\alpha<\beta<\gamma)$를 갖고, $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$이다.

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. $f(\alpha)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 β보다 작은 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

기 출	16
08. 6월 평가원	

모든 계수가 정수인 삼차함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

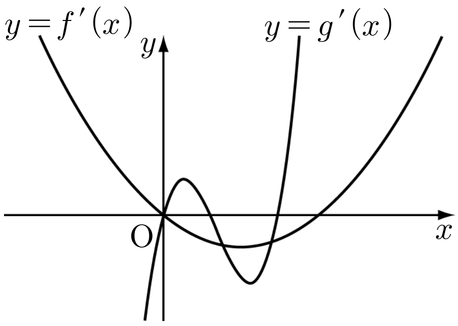
(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $f(1)=5$
(다) $1<f'(1)<7$

함수 $y=f(x)$의 극댓값은 m이다. m^2의 값을

구하시오.

기 출	17
08. 5월 학업성취도	

그림은 삼차함수 $y=f(x)$와 사차함수 $y=g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$와 $y=g'(x)$의 그래프이다. 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면?
(단, $f'(0)=0$, $g'(0)=0$)



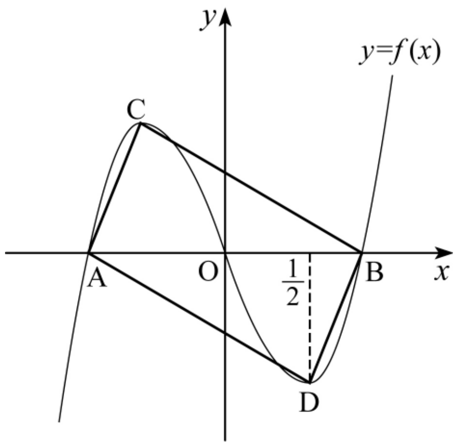
<보 기>

ㄱ. $x<0$에서 $y=f(x)-g(x)$는 증가한다.
ㄴ. $y=f(x)-g(x)$는 한 개의 극솟값을 갖는다.
ㄷ. $h(x)=f'(x)-g'(x)$라 할 때
$h'(x)=0$은 서로 다른 2개의 양의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

기 출	18
08. 10월 전국연합	

그림은 원점 O에 대하여 대칭인 삼차함수 $f(x)$의 그래프이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $f(x)$의 극대, 극소인 점을 각각 C, D라 하자.

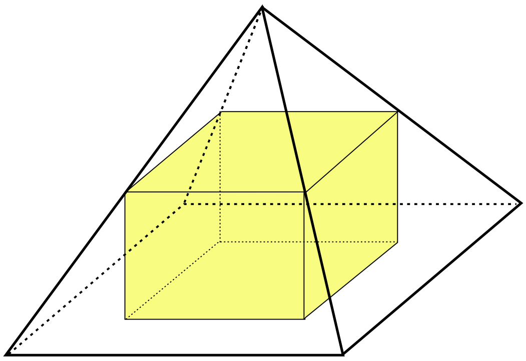


점 D의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이고 사각형 ADBC의 넓이가 $\sqrt{3}$일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [3점]

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

기 출	19
05. 5월 경기도	

모든 모서리의 길이가 3인 정사각뿔에 내접하는 직육면체의 부피의 최댓값은?



① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

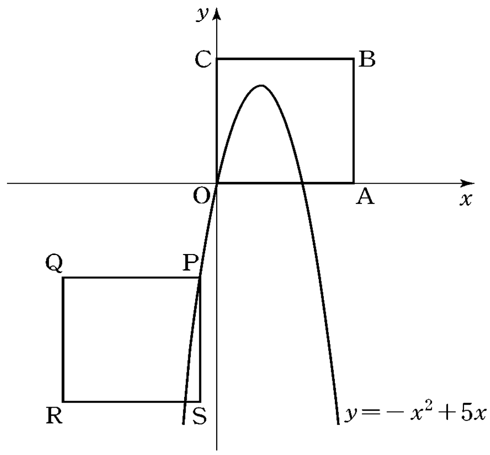
기 출	20
05. 7월 전국연합	

등식 $x^2+3y^2=9$ 를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 x^2+xy^2 의 최솟값은?

① $-\frac{5}{3}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 2

기 출	21
07. 6월 평가원	

그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(8, 0)$, $\mathrm{B}(8, 8)$, $\mathrm{C}(0, 8)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC와 한 변의 길이가 8이고 네 변이 좌표축과 평행한 정사각형 PQRS가 있다. P가 점 $(-1, -6)$에서 출발하여 포물선 $y=-x^2+5x$를 따라 움직이도록 정사각형 PQRS를 평행이동시킨다. 평행이동시킨 정사각형과 정사각형 OABC가 겹치는 부분의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



기 출	22
05. 6월 평가원	

다항함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$로부터 얻을 수 있는 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}$에 대하여, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, 모든 자연수 n에 대하여 $f'(n)\neq 0$이다.)

<보 기>

ㄱ. $f(x)=2x^3+3x^2+1$이면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}=\frac{1}{6}$이다.

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}$은 수렴한다.

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}$이 수렴하면 $x\to\infty$일 때 $f'(x)$는 발산한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

기 출	23
06. 6월 평가원	

두 다항함수 $f_1(x)$, $f_2(x)$가 다음 세 조건을 만족시킬 때, 상수 k의 값은?

(가) $f_1(0)=0$, $f_2(0)=0$

(나) $f_i'(0)=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f_i(x)+2kx}{f_i(x)+kx}$ $(i=1,2)$

(다) $y=f_1(x)$와 $y=f_2(x)$의 원점에서의 접선이 서로 직교한다.

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

기 출	24
04. 11월 수 능	

x에 대한 삼차방정식 $\frac{1}{3}x^3-x=k$가 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 가진다. 실수 k에 대하여 $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오.

기 출 25

07. 7월 전국연합

사차함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(a+1)x^3-ax$ 가 $x=\alpha,\ \gamma$에서 극소, $x=\beta$에서 극대일 때, 실수 a의 값의 범위는? (단, $\alpha<0<\beta<\gamma<3$)

① $-\frac{9}{2}<a<-4$ ② $-4<a<-\frac{7}{2}$

③ $-\frac{7}{2}<a<-3$ ④ $-3<a<-\frac{5}{2}$

⑤ $-\frac{5}{2}<a<-2$

기 출 26

07. 9월 평가원

삼차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 가 있다. 세 실수 a, b, c $(a<b<c)$ 에 대하여 $f(a)=f(b)=f(c)$ 가 성립할 때, 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f'(a)>0$

ㄴ. $f'(a)+f'(b)>0$

ㄷ. $f'(a)=f'(c)$ 이면 $b=\frac{a+c}{2}$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

기 출 27

08. 6월 평가원

삼차함수 $f(x)=x(x-1)(ax+1)$ 의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 0)$을 접점으로 하는 접선을 l이라 하자. 직선 l 에 수직이고 점 P를 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$와 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 a의 값의 범위는?

① $-1<a<-\frac{1}{3}$ 또는 $0<a<1$

② $-\frac{1}{3}<a<0$ 또는 $0<a<1$

③ $-1<a<0$ 또는 $0<a<\frac{1}{3}$

④ $-1<a<0$ 또는 $\frac{1}{3}<a<1$

⑤ $-2<a<-\frac{1}{3}$ 또는 $\frac{1}{3}<a<2$

기 출 28

06. 10월 전국연합

가로와 세로의 길이가 각각 $9\,\mathrm{cm}$, $4\,\mathrm{cm}$ 인 직사각형이 있다. 이 직사각형의 가로와 세로의 길이가 각각 매초 $0.2\,\mathrm{cm}$, $0.3\,\mathrm{cm}$ 씩 늘어난다고 할 때, 이 직사각형이 정사각형이 되는 순간의 넓이의 변화율은 몇 cm^2/초인가?

① 9.5 ② 10 ③ 10.5 ④ 11 ⑤ 11.5

기 출	29
05. 7월 전국연합	

원점 O를 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P ,Q의 t분 후의 좌표를 각각 x_1, x_2라 하면

$x_1 = 2t^3 - 9t^2$, $x_2 = t^2 + 8t$

이다. 선분PQ의 중점을M이라 할 때, 두 점 P ,Q가 원점을 출발한 후 4분 동안 세 점 P, Q, M이 움직이는 방향을 바꾼 횟수를 각각 a, b, c라고 하자. 이때, $a+b+c$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

기 출	30
08. 6월 평가원	

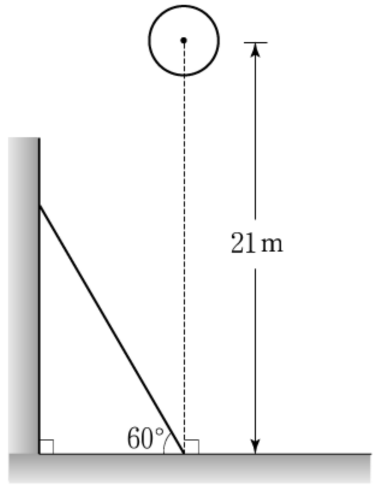
수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t일 때의 위치는 각각

$P(t) = \frac{1}{3}t^3 + 4t - \frac{2}{3}$, $Q(t) = 2t^2 - 10$이다.

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오.

기 출	31
07. 6월 평가원	

그림과 같이 편평한 바닥에 60°로 기울어진 경사면과 반지름의 길이가 0.5m인 공이 있다. 이 공의 중심은 경사면과 바닥이 만나는 점에서 바닥에 수직으로 높이가 21m인 위치에 있다.



이 공을 자유낙하시킬 때, t초 후 공의 중심의 높이 $h(t)$는

$h(t) = 21 - 5t^2$(m)

라고 한다. 공이 경사면과 처음으로 충돌하는 순간, 공의 속도는? (단, 경사면의 두께와 공기의 저항은 무시한다.)

① −20m/초 ② −17m/초 ③ −15m/초
④ −12m/초 ⑤ −10m/초

기출문제 답

1	20	2	⑤	3	45	4	16	5	②
6	⑤	7	⑤	8	16	9	④	10	④
11	④	12	②	13	15	14	64	15	③
16	32	17	⑤	18	①	19	①	20	①
21	527	22	④	23	①	24	12	25	①
26	⑤	27	③	28	①	29	③	30	12
31	①								

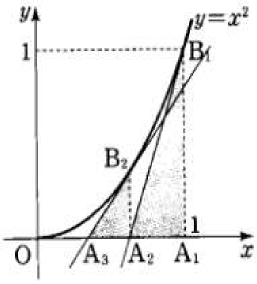
예 상 1

포물선 $y=-\frac{1}{4}x^2$위의 점$(2,-1)$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

예 상 2

그림과 같이 점$A_1(1,0)$을 지나 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점을 B_1이라 하고 점 B_1에서 그은 접선이 x축과 만나는 점을 A_2, A_2를 지나 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점을 B_2이라 하고 점 B_2에서 그은 접선이 x축과 만나는 점을 A_3라 하자. 이와 같은 과정을 한없이 계속할 때, $\triangle A_1B_1A_2$, $\triangle A_2B_2A_3$, $\triangle A_3B_3A_4$, ...의 넓이의 합은?



① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

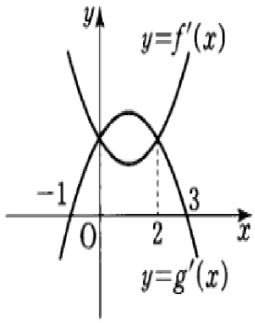
예 상 3

두 곡선의 교점에서 각 곡선의 두 교점이 서로 직교하면 두 곡선이 직교한다고 한다. 두 곡선 $y=x^3+2a$, $y=ax^2+bx$가 점$(1,k)$에서 직교할 때, 실수 k의 값은?

① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ 0

예 상 4

그림은 최고차항의 계수가 각각 1, -1인 두 삼차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프이다. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르시오.



<보 기>

ㄱ. $x<0$에서 $f(x)-g(x)$는 증가한다.
ㄴ. $1<x<3$에서 $f(x)+g(x)$는 감소한다.
ㄷ. $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는 32이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예 상 5

폐구간 $[0, 6]$에서 연속이고 개구간 $(0, 6)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 구간 $[0, 6]$에 속하는 임의의 두 실수 $a, b\,(a < b)$에 대하여

$f(x) = f(6-x)$, $f'(a) < f'(b)$

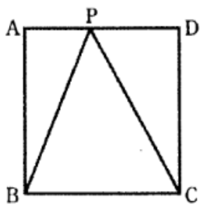
를 만족할 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르시오.

<보 기>

ㄱ. $f(a) < f(b)$
ㄴ. $f'(3) = 0$
ㄷ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예 상 6



한 변의 길이가 1인 정사각형 $ABCD$가 있다. 선분 AD위를 움직이는 동점 P에 대하여, $\overline{BP} \cdot \overline{CP}$의 최솟값은?

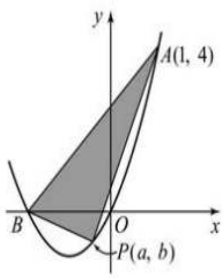
① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{25}{16}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ 2

예 상 7

삼차함수 $y = x(x-2)^2\ (0 \le x \le 2)$위의 동점 P에 대하여 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 한다. 원점을 O라 할 때, $\triangle OPH$넓이의 최댓값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 1

예 상 8

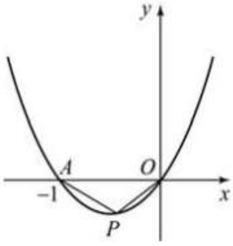


곡선 $y = x^2 + 3x$위의 점 $A(1, 4)$와 이 곡선이 x축의 음의 부분과 만나는 점 B가 그림과 같았다. 곡선위의 점 $P(a, b)$ $(a < 0, b < 0)$를 잡아 $\triangle ABP$의 넓이를 최대가 되게 할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

예 상 9

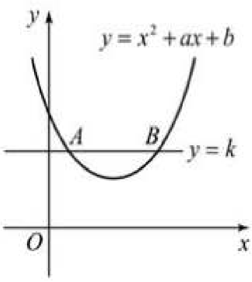
포물선 $y=x(x+1)$위의 점 $A(-1,0)$이 있다. 점P가 점 A에서 포물선을 따라 원점 O에 한 없이 가까이 갈 때, $\angle APO$의 크기의 극한값은?



① 90° ② 120° ③$135^\circ$ ④ 150° ⑤ 180°

예 상 10

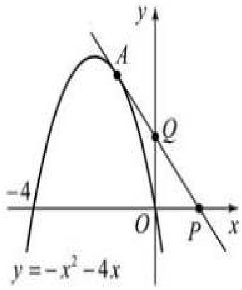
그림과 같이 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=k$가 두 점 A, B에서 만난다. $\overline{AB}=3$일 때, 점 A에서의 접선의 기울기는? (단, a, b는 상수)



① -3 ② -2 ③ $-\sqrt{3}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

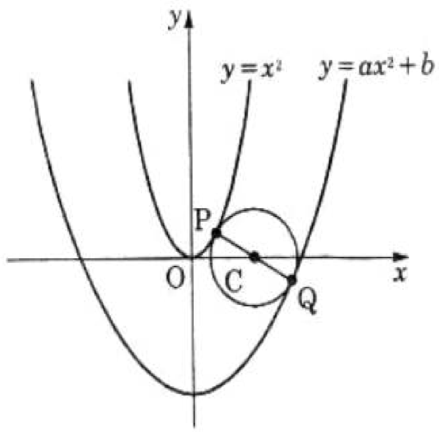
예 상 11

곡선 $y=-x^2-4x$ 위의 점 $A(t, t^2-4t)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 A가 곡선을 따라 원점 O에 한없이 가까워 질 때, 두 선분 OP와 OQ의 길이의 비 $\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$의 값은 상수 α에 한없이 가까워진다. 이 때 α^2의 값을 구하여라.



예 상 12

그림과 같이 곡선 $y=x^2$위의 점 $P(1,1)$에서 접하고 중심이 x축 취에 있는 점 C가 있다. 점 P를 지름의 양 끝점으로 하는 원 C의 다른 한 끝점을 점 Q라고 하자.



곡선 $y=ax^2+b$가 점 Q에서 원 C에 접할 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수)

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{5}{6}$ ④ $-\frac{6}{5}$ ⑤ $-\frac{5}{4}$

예 상 13

함수 $f(x)=x^3-6x^2+ax-2$가 구간 $(1,4)$에서 감소함수이기 위한 상수 a의 범위는?

① $a \le 0$ ② $0 \le a \le 1$ ③ $1 \le a \le 2$
④ $2 \le a \le 3$ ⑤ $a \ge 3$

예 상 14

삼차함수 $y=f(x)$가 서로 다른 세 실수 a, b, c에 대하여

$f(a)=f(b)=0,\ f'(a)=f'(c)=0$

을 만족시킨다. c를 a, b로 나타내면?

① $a+b$ ② $\dfrac{a+b}{2}$ ③ $\dfrac{a+b}{3}$
④ $\dfrac{a+2b}{3}$ ⑤ $\dfrac{2a+b}{3}$

예 상 15

둘레의 길이가 50인 원 위를 두 점 P, Q가 같은 점에서 동시에 출발하여 같은 방향으로 회전하고 있다. t초 후에 점 P, Q가 이동한 거리는 각각 t^3, $7t^2+5t$이다. $0 < t \le 10$일 때, 점 P, Q가 만나는 횟수는?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 12

예 상 16

밑면의 반지름이 매초 $1cm$의 비율로 증가하고, 높이가 매초 $1cm$의 비율로 감소하는 직원기둥이 있다.
반지름이 $3cm$, 높이가 $10cm$일 때, 부피의 변화율은?
(단, 단위는 $cm^3/\sec$이다.)

① 50 ② 51 ③ 52 ④ 53 ⑤ 54

예 상 17

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

<보 기>

ㄱ. $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.
ㄴ. $f(x)$가 증가함수이면, $f'(a)>0$이다.
ㄷ. $f'(a)=0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 가진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예 상 18

함수 $f(x)=x^3+ax^2-3b^2x+1$이 모든 실수 x에 대하여

$f(x)+f(-x)=2f(0)$

을 만족하고, 극솟값이 -1을 갖도록 두 상수 a, b의 값을 정할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

예 상 19

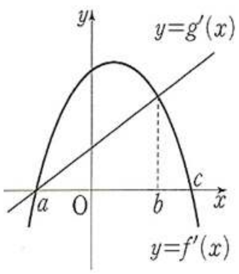
함수 $f(x)=\log_9(5-x)+\log_3(x+4)$의 최댓값은?

① $\dfrac{7}{2}$ ② 4 ③ $\dfrac{2}{5}+\log_3 4$

④ $\dfrac{3}{2}+\log_3 2$ ⑤ $4+\log_3 6$

예 상 20 (수능열기 17)

삼차함수 $y=f(x)$와 이차함수 $y=g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $a<x<c$에서 증가한다.

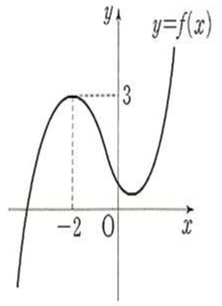
ㄴ. 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 $x=a$에서의 극값을 같다.

ㄷ. 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖고, $x=b$에서 극댓값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

예 상 21

미분가능한 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같이 $x=-2$에서 극댓값 3을 가질 때, 곡선 $y=xf(x)$위의 점 $(-2, k)$에서의 접선의 방정식은? (단, k는 실수)



① $y=x$ ② $y=x-1$

③ $y=3x$ ④ $y=3x-1$

⑤ $y=-2x+1$

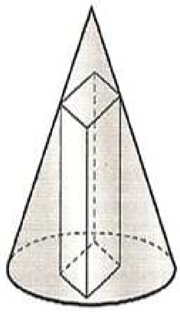
예 상 22

곡선 $y=-x^2+4x$와 직선 $y=-x+4$의 두 교점을 각각 A, B라 하자. 포물선 위의 점 P가 포물선을 따라 점 A에서 B까지 움직이고, 삼각형 ABP의 넓이가 최대일 때 점 P의 좌표는 (α, β)이다. 이 때, $\alpha+2\beta$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

예 상 23

밑변의 반지름의 길이가 1, 높이가 3인 직원뿔에 내접하는 밑면이 정사각형인 직육면체의 부피의 최댓값은?

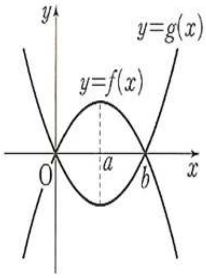


① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{8}{9}$

④ 1 ⑤ $\frac{10}{9}$

예 상 24

오른쪽 그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 일부이다. $h(x)=f(x)g(x)$라고 할 때, 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. 구간 $(0, a)$에서 x의 값이 증가할 때, $h(x)$의 값도 증가한다.
ㄴ. 구간 $[a, b]$에서 $h(x)$의 최솟값은 $h(a)$이다.
ㄷ. 구간 $(0, a)$에서 방정식 $h(x)+h'(x)=0$의 실근은 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예 상 25

상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$f'(x)=-f'(-x)$

를 만족할 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(-x)=f(x)$이다.
ㄴ. 함수 $y=f(x)$가 $x=-a\,(a\neq 0)$에서 극댓값을 가지면 $x=a$에서 극솟값을 가진다.
ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 홀수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예 상 26

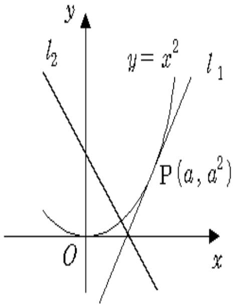
빗변의 길이가 5인 직각삼각형 중에서 넓이가 최대인 것의 둘레의 길이는?

① 12 ② 15 ③ $5+5\sqrt{2}$

④ $5+2\sqrt{5}$ ⑤ $10+2\sqrt{2}$

예 상 27

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\,a^2)$ 에서 그은 접선을 l_1 이라 하고, 직선 l_1 과 x 축이 이루는 각 중에서 큰 각을 이등분하는 직선을 l_2 라고 하자.

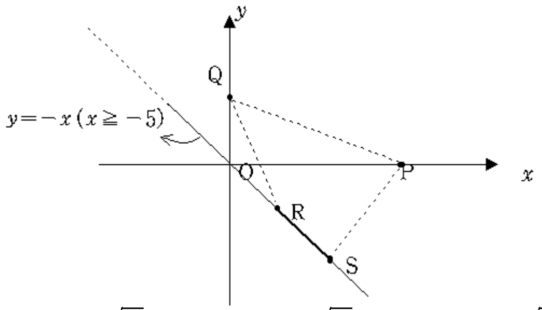


직선 l_2 의 방정식이 $y=-\sqrt{3}\,x+k$ 일 때, 상수 k 의 값은? (단, $a>0$)

① $\frac{3}{4}$　② $\frac{\sqrt{3}}{2}$　③ 1　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

예 상 28

좌표평면 위에 두 정점 $\mathrm{P}\,(12,0)$, $\mathrm{Q}\,(0,5)$ 가 있다. 길이가 $5\sqrt{2}$ 인 선분 RS 가 반직선 $y=-x\,(x\geq-5)$ 위에서 움직일 때, 사각형 PQRS 의 둘레의 길이의 최솟값은?



① $20+6\sqrt{2}$　② $22+6\sqrt{2}$　③ $22+8\sqrt{2}$
④ $24+5\sqrt{2}$　⑤ $26+5\sqrt{2}$

예 상 29

다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)+f(x)+12}{x-1}=12$$

를 만족할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$ 에서의 접선의 y 절편은?

① -12　② -10　③ -8　④ -6　⑤ -4

예 상 30

삼차함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(가) 곡선 $y=f(x)+1$ 은 $x=1$ 에서 x 축에 접한다.
(나) 곡선 $y=f(x)-1$ 은 $x=-1$ 에서 x 축에 접한다.

이 때, $f(4)$ 의 값을 구하시오.

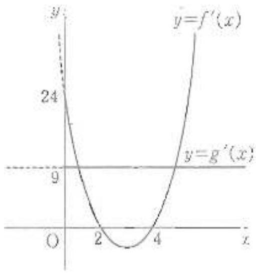
예 상 31

곡선 $y=x(x+1)^2$ 위의 점P에서의 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각A, B라 하자. 점P가 원점O에 한없이 가까워질 때, $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$ 의 극한값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

예 상 32

어느 공장에서 제품을 x만개 생산하는데 드는 비용을 $f(x)$, 제품을 x만개 팔았을 때 총 수입을 $g(x)$라고 하고, 두 함수 $f(x), g(x)$의 도함수의 그래프는 그림과 같다. 이 공장의 판매이익을 $g(x)-f(x)$라 하고 생산하는 제품이 모두 팔린다고 할 때, 최대 이익을 얻기 위해서는 제품을 a만개 생산하여야 한다. 이 때, a의 값은? (단, $f(0)=g(0)=0$, $f'(x)$는 이차함수, $g'(x)$는 상수함수이다.)



① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

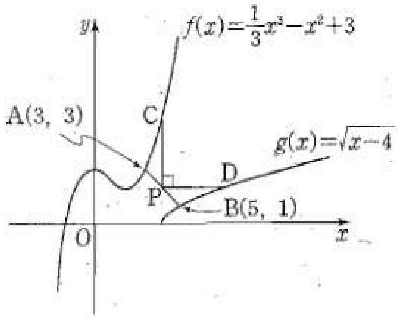
예 상 33

곡선 $y=x^2-x-1$위의 점 P와 원점 O와의 거리가 최소가 될 때, 점 P의 x좌표는?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ 0

예 상 34

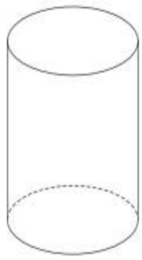
다음 그림과 같이 두 점 $A(3,3)$, $B(5,1)$을 이은 선분 AB 위의 임의의 점 P를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+3$과 만나는 점을 C, x축에 평행한 직선이 곡선 $g(x)=\sqrt{x-4}$ 와 만나는 점을 D라 하자. 이 때, $\overline{PC}+\overline{PD}$ 가 최소가 되도록 하는 점 P의 x좌표는?



① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

예 상 35

오른쪽 그림과 같이 겉넓이가 일정한 직원기둥에서 부피가 최대가 될 때, 직원기둥 밑면의 반지름의 길이와 높이의 비는?



① $2:1$ ② $1:\sqrt{2}$ ③ $1:\sqrt{3}$
④ $1:2$ ⑤ $\sqrt{2}:1$

예 상 36

다항함수 $f(x)$에 대하여
$\{f'(x)\}^2=f(x)$, $f'(2)\bullet f'(-2)=207$
을 만족할 때, $f(0)$의 값을 구하시오.

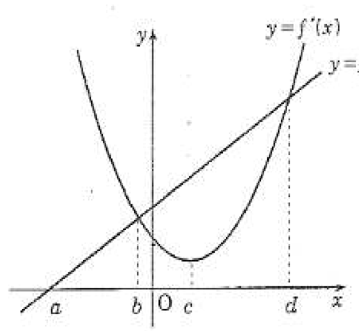
예 상 37

점 $A(0,a)$에서 곡선 $y=x^3-x^2$에 세 개의 접선을 그을 수 있을 때, 실수 a값의 범위는 $\alpha<a<\beta$이다.

이 때, $\alpha+\dfrac{1}{\beta}$의 값을 구하시오.

예 상 38

삼차함수 $y=f(x)$와 이차함수 $y=g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$와 $y=g'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(0)=g(0)$, $f(a)-g(a)<0$일 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

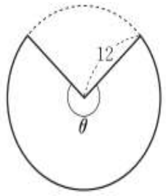
<보 기>

ㄱ. $f(c)-g(c)>0$
ㄴ. 방정식 $f(x)=g(x)$는 서로 다른 세 실근을 갖는다.
ㄷ. 구간 $[a,d]$에서 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=b$일 때, 최댓값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

예 상 39

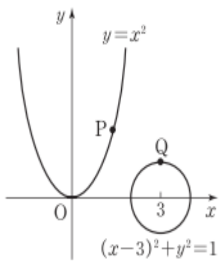
반지름의 길이가 12인 원의 일부를 잘라내고 남은 부채꼴을 가지고 뚜껑이 없는 직원뿔 모양의 그릇을 만들려고 한다. 이 그릇의 부피가 최대가 되는 부채꼴의 중심각 θ의 크기는?



① $\dfrac{\sqrt{6}}{3}\pi$　② $\dfrac{\sqrt{6}}{2}\pi$　③ $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$
④ $\dfrac{5\sqrt{6}}{6}\pi$　⑤ $\dfrac{7\sqrt{6}}{6}\pi$

예 상 40

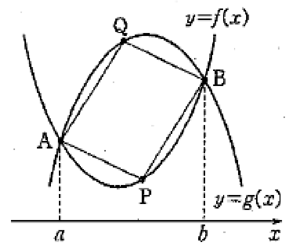
그림과 같이 포물선 $y=x^2$ 위의 동점 P와 원 $(x-3)^2+y^2=1$ 위의 동점 Q가 있다. 이 때, 선분 PQ 길이의 최솟값은?



① $\sqrt{3}-1$　② 1
③ $\sqrt{5}-1$　④ $\sqrt{2}$
⑤ $2\sqrt{2}-1$

예 상 41

그림과 같이 두 이차함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 두 점 A, B에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$위의 점 $P(\alpha, f(\alpha))$, 곡선 $y=g(x)$위의 점 $Q(\beta, f(\beta))$에 대하여 사각형 $APBQ$의 넓이가 최대일 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $a<b$이고, $\alpha<a, b<\beta$)



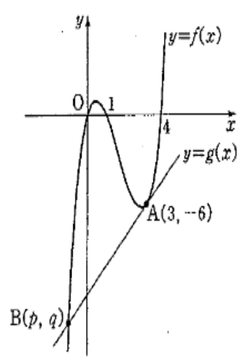
<보 기>

ㄱ. 직선 PQ와 직선 AB가 수직이다.
ㄴ. $f'(\alpha)$는 직선 AB의 기울기와 같다.
ㄷ. $\alpha=\beta$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예 상 42

삼차함수 $f(x)=x^3-5x^2+4x$의 그래프 위의 점 $A(3,-6)$에서 접선 $y=g(x)$와 곡선 $y=f(x)$가 접점 이외의 점 $B(p, q)$에서 만난다. $p<x<3$일 때, $f(x)-g(x)$가 $x=a$에서 최댓값을 가진다. 이 때, $9a$의 값을 구하시오.



예 상 43

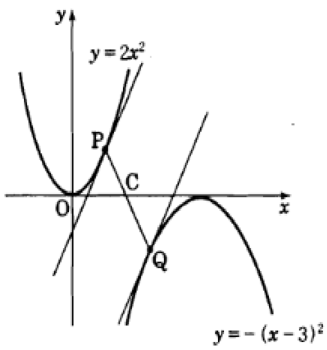
좌표 평면위의 두 점 $A\left(0, \frac{5}{2}\right)$, $B\left(2, \frac{5}{2}\right)$에 대하여 곡선 $y=x^3-3ax^2+3$이 선분 AB와 교점을 가지도록 하는 실수 a값의 범위는?

① $a \geq 1$ ② $a \geq \frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2} \leq a < 1$

④ $1 \leq a < 2$ ⑤ $\frac{1}{3} \leq a < 3$

예 상 44

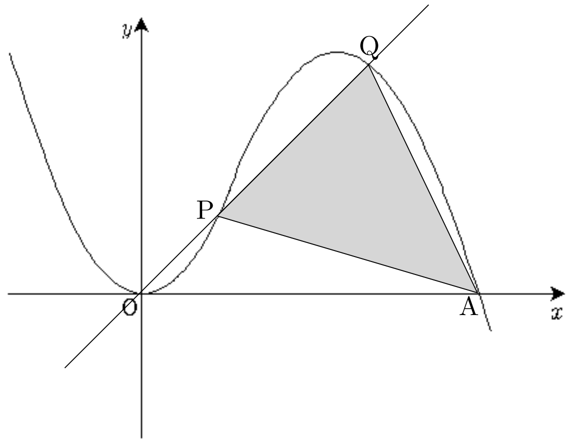
다음 그림과 같이 곡선 $y=2x^2$ 위의 점 P에서의 접선과 곡선 $y=-(x-3)^2$ 위의 점 Q에서의 접선이 평행할 때, 직선 PQ는 x축 위의 한 정점 C를 지나고 $\overline{CQ}=k \cdot \overline{CP}$ 이다. 이 때, 상수 k의 값은?



① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

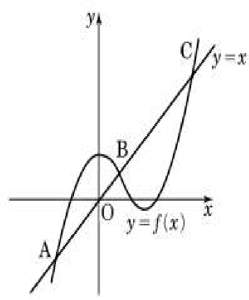
예 상 45

아래 그림과 같이 삼차함수 $y=x^2(3-x)$의 그래프와 직선 $y=mx$가 제1사분면 위의 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 이 때, 세 점 A$(3, 0)$, P, Q를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$APQ의 넓이가 최대가 되게 하는 양수 m에 대하여 $10m$의 값을 구하시오.



예 상 46

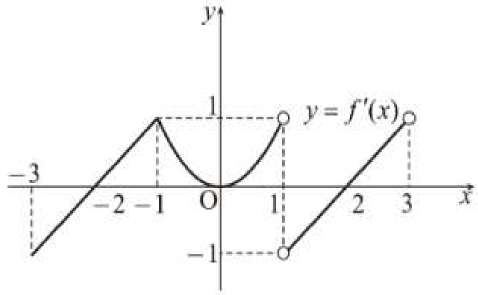
그림과 같이 최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 세 점 A, B, C에서 만난다. $\overline{AB}=3\sqrt{2}$, $\overline{BC}=4\sqrt{2}$ 일 때, 점 C에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기는?



① 51 ② 53 ③ 55 ④ 57 ⑤ 59

예 상 47

$-3<x<3$에서 연속인 함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to 1+0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1$

ㄴ. 폐구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때, 최대이다.

ㄷ. 개구간 $(-3, 3)$에서 함수 $f(x)$는 오직 두 개의 극값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

예 상 48

직선 $y=kx$가 곡선 $y=x^3+3x^2+5$에 접할 때, 상수 k의 값을 구하시오.

예 상 49

직선 $y=x-1$ 위의 점 (a, b)에서 포물선 $y=x^2$에 두 개의 접선을 그어 그 접점을 각각 $P(\alpha, \alpha^2)$, $Q(\beta, \beta^2)$이라 하자. 이 때, $\overline{PQ}$의 중점 M이 그리는 도형의 방정식은?

① $y=x+1$ ② $y=2x+1$
③ $y=x^2+x+1$ ④ $y=2x^2-x+1$
⑤ $y=2x^2+x+1$

예 상 50

좌표평면 위의 점 $(1, k)$에서 곡선 $y=x^3+x+1$에 서로 다른 3개의 접선을 그을 수 있도록 하는 실수 k값의 범위가 $\alpha<k<\beta$일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

예 상 51

함수 $f(x)=x^2-x-6$, $g(x)=x^2-ax+4$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)\geq 0$이 되는 실수 a의 범위는? (단, $f\circ g$는 g와 f의 합성함수)

① $a\leq -1, a\geq 1$ ② $-1\leq a\leq 1$
③ $a\leq -2, a\geq 2$ ④ $-2\leq a\leq 2$
⑤ $-4\leq a\leq 4$

예 상 52

삼차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 다음 중 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 충분조건은?

(가) $f'(0)>g'(0)$이다.
(나) $f'(-1)=g'(-1)$이고 $f'(1)=g'(1)$이다.

① $f(-1)>g(-1)$ ② $f(-1)<g(-1)$
③ $f(1)>g(1)$ ④ $f(1)<g(1)$
⑤ $f(0)=g(0)$

예 상 53

삼차함수 $f(x)=x^3-3x+1$에 대하여 $f(f(x))=0$을 만족하는 서로 다른 실근의 개수는?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

예 상 54

수직선 위를 움직이는 두 점 A, B의 시각 t에서의 위치가 각각

$$x_A=\frac{1}{3}t^3+t^2-2t,\ x_B=2t^2+t-14$$

일 때, 두 점 A, B가 가장 가까울 때의 시각 t는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

예 상 55

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표가 $(t-1, 3t-t^2)$이다. $t=2$에서의 점 P의 속도와 x축의 양의 방향과 이루는 각 θ의 크기는? (단, $0^\circ\leq\theta\leq 360^\circ$)

① 30° ② 60° ③ 135° ④ 240° ⑤ 315°

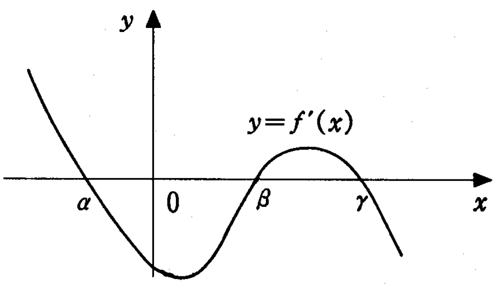
예 상 56

x축 위를 움직이는 두 점 P, Q의 $t\,(t>0)$초 후의 위치는 $f(t)=t^3-2t^2-4t+6$, $g(t)=t^2-12t$이다. 두 점 P, Q가 서로 반대방향으로 움직이는 시간은 몇 초 동안인가?

① 3초 ② 4초 ③ 5초 ④ 6초 ⑤ 7초

예 상 57

사차함수 $f(x)$에 대하여 $y=f'(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다. $f'(\alpha)=0, f'(\beta)=0$, $f'(\gamma)=0$이고, $f(\alpha)=4$, $f(\beta)=-4$, $f(\gamma)=-1$, $f(0)=-3$일 때, 방정식 $|f(x)|-3=0$의 실근의 개수는?



① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

예 상 58

윗면의 반지름의 길이가 $10\,cm$, 높이가 $30\,cm$인 직원뿔 모양의 그릇이 있다. 매초 $4\,cm$의 비율로 수면의 높이가 올라가도록 물을 넣을 때, 수면의 높이가 $12\,cm$가 되는 순간의 수면의 넓이의 증가 속도는? (단, 단위는 $cm^2/\sec$)

① $\frac{25}{3}\pi$ ② 9π ③ $\frac{28}{3}\pi$ ④ 10π ⑤ $\frac{32}{3}\pi$

예 상 59

일직선 운동을 하는 두 물체 P, Q의 t초 후의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하자. 물체 P는 물체 Q보다 $54m$ 앞에서 출발하여 $v_P=3t^2(m/초)$의 속도로 움직이고 물체 Q는 일정한 속도 $v_Q(m/초)$로 움직인다. 두 물체가 만나게 되는 v_Q의 값 중에서 최소인 것을 a라 하자. $v_Q=a$일 때, 두 물체는 Q가 처음에 있었던 위치보다 얼마만큼 떨어진 위치에서 만나게 되는가?

① $54m$ ② $61m$ ③ $73m$ ④ $78m$ ⑤ $81m$

예 상 60

삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 두 함수 $g(x), h(x)$ 를 $g(x)=f'(x)$, $h(x)=g'(x)$ 로 정의하자. $g(0)=h(0)=0$ 이고 $f(0)h'(0)<0$ 일 때, 방정식 $f(x)=0$ 의 실근에 대한 설명으로 옳은 것은?

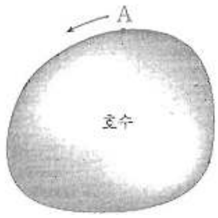
① 서로 다른 세 개의 양의 실근을 갖는다.
② 서로 다른 세 개의 음의 실근을 갖는다.
③ 한 개의 양의 실근과 서로 다른 두 개의 음의 실근을 갖는다.
④ 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖는다.
⑤ 한 개의 양의 실근을 갖는다.

예 상 61

동일한 직선도로 위를 같은 방향으로 달리는 두 자동차 A 와 B 가 있다. 자동차 A 가 매시 72 ㎞의 속력으로 달리고 있던 중 P 지점에 이르렀을 때, P 지점에서 100 m 앞에 정지하고 있던 자동차 B 를 발견하고 제동장치를 작동하여 -5 m/초^2 의 가속도로 운행하였다. A 가 제동장치를 작동한지 4 초가 되는 순간에 정지하고 있던 B 는 6 m/초^2 의 가속도로 출발하였고, 동시에 A 는 10 m/초^2 의 가속도로 계속하여 운행하였다. 이 때, P 지점에서 A 가 B 를 추월하는 지점까지의 거리는 몇 m 인지를 구하시오.

예 상 62

둘레의 길이가 $200m$인 호수를 갑은 자전거를 이용하여 돌고 있고, 을은 도보로 돌고 있다. 갑과 을이 A지점에서 같은 방향으로 출발한지 t분후 까지 움직인 거리는 각각 $t^3+53t(m)$, $56t(m)$이다. 출발 후 10분 동안 두 사람이 만난 횟수를 구하시오. (단, 출발하는 순간은 제외한다)



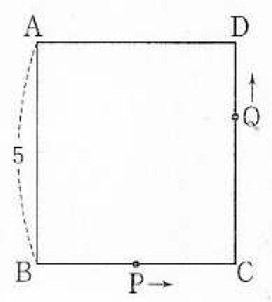
예 상 63

좌표평면 위를 움직이는 두 점 P, Q가 원점 O를 동시에 출발하여 점 P는 x축의 양의 방향으로, 점 Q는 y축의 양의 방향으로 각각 매초 3, 5의 속력으로 움직인다. 직선 PQ와 직선 $y=\frac{1}{3}x$의 교점 R의 속력은?

① $\frac{5\sqrt{5}}{6}$ ② $\frac{10\sqrt{5}}{6}$ ③ $\frac{5\sqrt{10}}{6}$
④ $\frac{10\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{20}}{6}$

예 상 64

한 변의 길이가 5인 정사각형 $ABCD$가 있다. 두 점 P, Q가 점 A를 동시에 출발하여 시계 반대 방향으로 이 정사각형 위를 움직인다. 두 점 P, Q가 점 A를 출발하여 t초 동안 움직인 거리는 각각 t^3, $3t^2+24t$일 때, 출발 후 8초 동안 두 점 P, Q가 만난 횟수를 구하시오.



예 상 65

홍태는 스카이 다이빙을 하기 위해 비행기로 지상 $6500m$ 높이까지 올라간 다음 지면에 수직인 방향으로 낙하하였다. 낙하하여 낙하산을 펼 때 까지 시각 t에서의 낙하 속도는 $10t\,m/s$이고, 낙하산을 펼친 순간부터 처음 10초 동안 가속도는 $-28t\,m/s^2$이며, 그 후에는 등속운동을 한다고 가정한다.
홍태가 낙하산을 펼친 지 30초 후에 지면에 도달했을 때, 비행기에서 낙하한 순간부터 낙하산을 펼칠 때까지 걸린 시간은?

① 30초 ② 40초 ② 50초 ③ 60초 ④ 70초

예상문제 답

1	①	2	④	3	④	4	③	5	②
6	①	7	③	8	①	9	③	10	①
11	16	12	④	13	①	14	④	15	④
16	②	17	①	18	1	19	④	20	④
21	③	22	②	23	③	24	④	25	③
26	③	27	①	28	⑤	29	②	30	26
31	③	32	③	33	②	34	①	35	④
36	208	37	27	38	⑤	39	③	40	③
41	④	42	3	43	②	44	②	45	15
46	④	47	③	48	9	49	④	50	13
51	④	52	⑤	53	③	54	③	55	⑤
56	②	57	⑤	58	⑤	59	⑤	60	⑤
61	190	62	5	63	③	64	14	65	①